Aula 17 – Máximos e mínimos (2ª parte) – Multiplicadores de Lagrange

Ao pedir um conselho, estamos, na maioria das vezes,

buscando um cúmplice.

Lagrange

Objetivo

- Usar os multiplicadores de Lagrange para calcular máximos e mínimos.

Introdução

Na aula anterior, você aprendeu a localizar os pontos críticos de uma função $f(x, y)$, além de uma maneira de caracterizá-los como máximos ou mínimos locais, ou eventuais pontos de sela de f.

Portanto, estávamos interessados em fazer uma análise local dos pontos críticos. Nesta aula, nosso objetivo é encontrar os pontos de máximo e de mínimo (absolutos) de uma função f num dado conjunto $A \subset \mathrm{Dom}(f)$. Ou seja, estaremos considerando um problema de caráter global.

Por exemplo, suponha que $T(x, y)$ descreve a temperatura de uma chapa de metal, localizada em $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; 0 \leq \mathrm{x} \leq \mathrm{a},\ 0 \leq \mathrm{y} \leq \mathrm{b}\}$.

Para determinar os pontos da chapa onde ocorrem as temperaturas extremas, temos de fazer uma análise global do comportamento de T em A.

Quando consideramos um problema dessa natureza, a primeira preocupação é saber se o problema tem solução.

Veja, antes de lançarmo-nos na busca de alguma coisa, seria interessante saber se tal coisa existe. A falta dessa informação não impede a busca (como diria Cristóvão Colombo) mas, se sabemos que o objeto da busca existe, poderíamos traçar estratégias de encontrá-lo, levando isso em conta.

O resultado matemático que nos auxilia com essa questão é um teorema da mais alta estirpe, que você já conhece do Cálculo I, o Teorema de Weierstrass.

Teorema de Weierstrass

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, definida no aberto D de $\mathbb{R}^n$. Seja $A \subset D$ um conjunto compacto. Então, f admite ponto de máximo e ponto de mínimo em A.

Lembre-se, um conjunto compacto é um conjunto fechado e limitado. Em particular, contém todos os pontos de seu bordo.

Nem todos os problemas que consideraremos recaem nas hipóteses do Teorema de Weierstrass, pois há circunstâncias nas quais o conjunto em questão não é limitado, por exemplo. No entanto, esse resultado é típico da Teoria das Funções Contínuas, e sua demonstração é, geralmente, apresentada nos cursos de Análise Matemática.

O Teorema de Weierstrass afirma, por exemplo, que se considerarmos a função que associa, em um determinado instante, a cada ponto da superfície terrestre, a sua temperatura, essa função admite um máximo e um mínimo.

Em outras palavras, se admitirmos que a temperatura varia continuamente de um ponto para outro, como a superfície da terra, apesar de extensa, é um conjunto compacto, há um ponto no globo terrestre no qual, naquele instante, a temperatura é máxima, e um ponto onde a temperatura é mínima.

Após essas considerações sobre a questão da existência de pontos extremos, vamos considerar a questão da localização de tais pontos. Lembra-se do detetive da aula anterior? Ele precisa encontrar suspeitos.

Muito bem! Há dois tipos de suspeitos: os que residem no interior do conjunto A e os que vivem no bordo de A. Para encontrar os suspeitos interioranos, usamos a técnica que você aprendeu na aula anterior: pontos críticos e análise local. Veja, se um ponto interior não é extremo local, não pode ser extremo global.

A busca por suspeitos que se localizam no bordo do conjunto A (pontos críticos no bordo) será feita com o auxílio de uma técnica chamada *Multiplicadores de Lagrange*.

Multiplicadores de Lagrange

Motivação

Vamos considerar a seguinte situação: um lenhador montou seu acampamento nas proximidades de uma lagoa e deparou-se com o problema de descobrir onde iria buscar água.

Admitindo que o terreno seja plano e que não haja maiores obstáculos, como poderíamos ajudá-lo nessa tarefa?

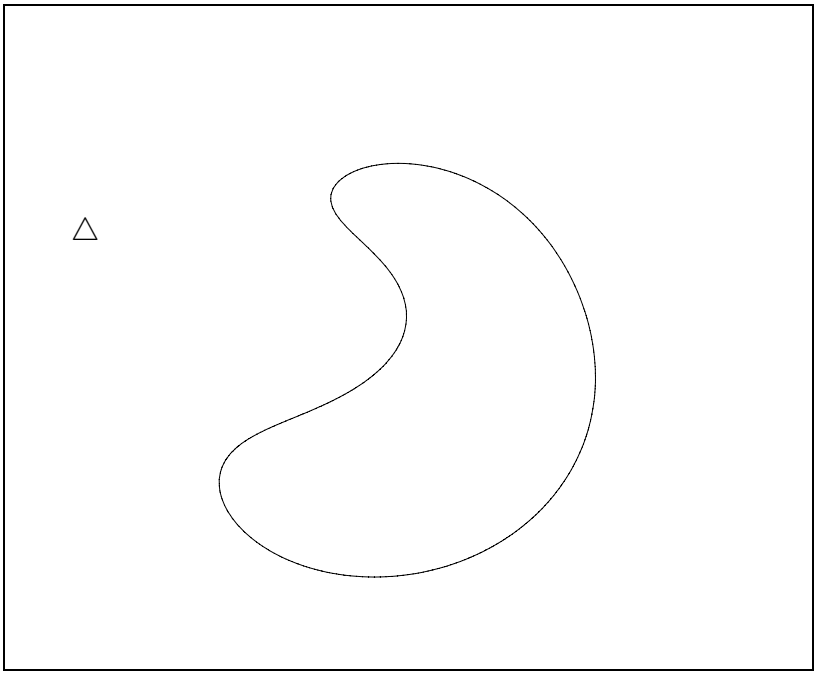

Figura 17.1: O triângulo indica a posição do acampamento e a curva fechada é a margem da lagoa.

Por sugestão de um aluno do pólo de P., o lenhador muniu-se de uma longa corda, fixou uma de suas extremidades no acampamento e dirigiu-se para o ponto da margem que ele julgava ser o mais próximo.

Usando a corda esticada, e após algumas comparações, ele teve a certeza de ter encontrado o lugar perfeito.

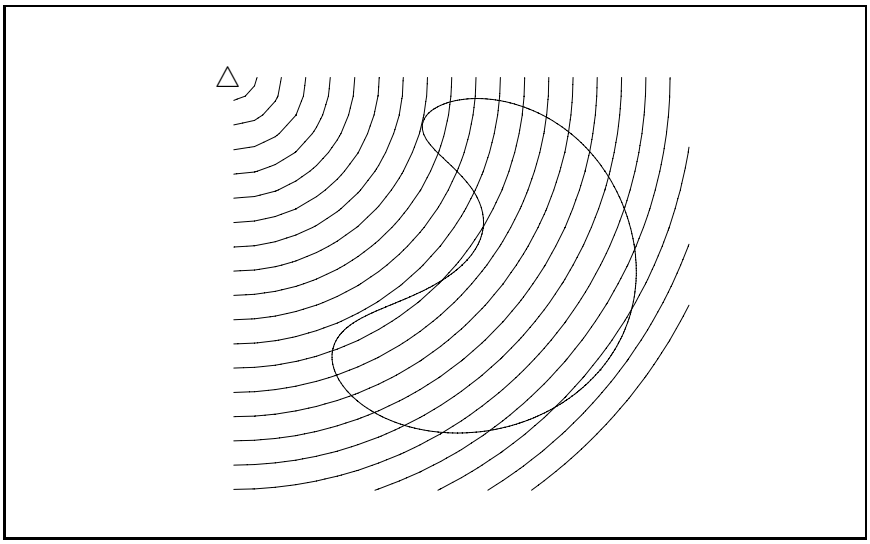

Figura 17.2: Os setores de círculos são as curvas de nível da função *distância até o acampamento*. No ponto da margem mais próximo do acampamento, o setor de círculo tangencia a margem.

A sugestão do aluno foi que o lenhador usasse a idéia básica do método matemático conhecido como Multiplicadores de Lagrange, assunto que você estudará nesta aula.

Atividade 17.1

Resolva a seguinte variante do problema: o lenhador precisa sair do acampamento, pegar água na lagoa e levá-la até o ponto B, onde ele mantém um lindo canteiro de hortaliças.

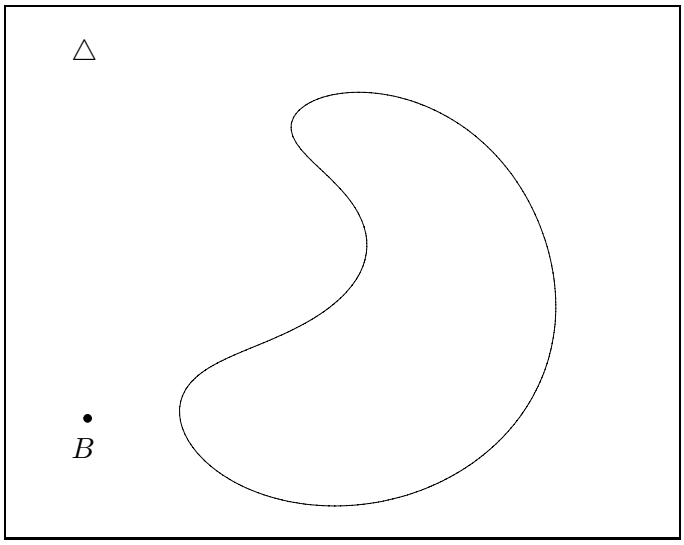

Figura 17.3: O ponto B indica o canteiro onde o lenhador cultiva as hortaliças.

Multiplicadores de Lagrange

Nesta seção estaremos considerando o problema de localizar os pontos extremos de uma função f sobre um específico conjunto de nível de alguma outra função g.

O problema que consideramos na motivação se encaixa neste contexto. Basta que tomemos um sistema de coordenadas com origem no acampamento, por exemplo. A função f que queremos minimizar é a distância até a origem. Para completar a modelagem precisaríamos encontrar uma função g que tivesse a margem da lagoa como uma de suas curvas de nível.

Nessas circunstâncias, os pontos críticos serão os pontos onde os conjuntos de nível de f e o conjunto de nível específico de g são tangentes um ao outro.

O resultado que enunciaremos a seguir nos dá um critério analítico que identifica tais pontos, no caso de f e g serem funções de duas variáveis.

Teorema (Multiplicadores de Lagrange)

Sejam f e g funções de classe C^1, definidas num domínio aberto comum D de $\mathbb{R}^2$. Seja

$$C = \{(x,y) \in D\,;\ g(x,y) = c\},$$

um conjunto não vazio. Se $(a,b) \in D$ é um ponto extremo de f em C e $\nabla g(a,b) \neq \vec{0}$, então existe um número λ, tal que

$$\nabla f(a,b) = \lambda\, \nabla g(a,b).$$

Esse teorema nos dá uma condição necessária (mas não suficiente) para que um ponto $(a,b) \in C$ seja um ponto extremo de f. Essa condição é fazer com que os vetores gradientes de f e de g sejam múltiplos um do outro. Nesse caso, o escalar λ é o *multiplicador de Lagrange*.

Intuitivamente, em torno de um ponto (x_0, y_0) da curva C em que os vetores gradientes de f e de g não estão alinhados, as curvas de nível de f e a curva C encontram-se transversalmente. Portanto, neste trecho da curva C, a função f é estritamente crescente (ou decrescente). Logo, o ponto não pode ser nem de máximo nem de mínimo local em C.

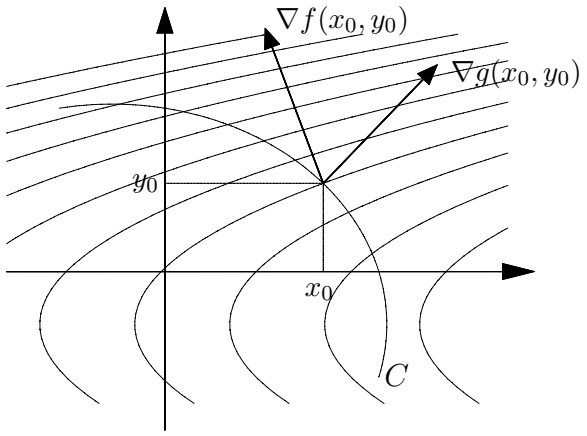

Figura 17.4: Comportamento de f em torno de um ponto (x_0, y_0) onde os gradientes de f e de g são linearmente independentes.

Mas, antes de você conhecer a demonstração do teorema, veja como o método funciona num exemplo.

Exemplo 17.1

Vamos determinar o ponto (x, y) pertencente à reta definida por $3x + 2y = 12$, tal que o produto xy de suas coordenadas seja o maior possível.

Muito bem! Colocando o problema em termos do método dos Multiplicadores de Lagrange, queremos encontrar o ponto máximo da função $f(x, y) = xy$ no conjunto

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; g(x, y) = 12\},$$

onde $g(x, y) = 3x + 2y$.

O candidato a máximo deve satisfazer o sistema de equações a seguir.

$$\begin{cases} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \\ g(x, y) = 12, \end{cases}$$

para algum $\lambda \in \mathbb{R}$.

Vejamos, como $\nabla f(x, y) = (y, x)$ e $\nabla g(x, y) = (3, 2)$, temos

$$\begin{cases} y = 3\lambda \\ x = 2\lambda \\ 3x + 2y = 12. \end{cases}$$

Calculando λ na primeira equação e substituindo na segunda, obtemos

$$x = \frac{2}{3}y.$$

Substituindo na terceira equação, obtemos

$$2y + 2y = 12 \iff y = 3.$$

Logo, o ponto $(2, 3)$ é o único candidato a ponto extremo da função $f(x, y) = xy$ sobre a reta C, definida por $3x + 2y = 12$.

Para terminarmos o exercício devemos fazer uma análise global da situação. Como as extremidades da reta C pertencem ao segundo e ao quarto quadrantes, nos quais o produto xy é negativo, podemos concluir que o ponto $(2, 3)$ é o ponto de máximo procurado.

Note que o Teorema de Weierstrass não se aplica nessa situação, uma vez que o conjunto C não é compacto, pois não é limitado.

Veja um esboço das curvas de nível de f com o conjunto C, assim como o gráfico da função f restrita ao conjunto C.

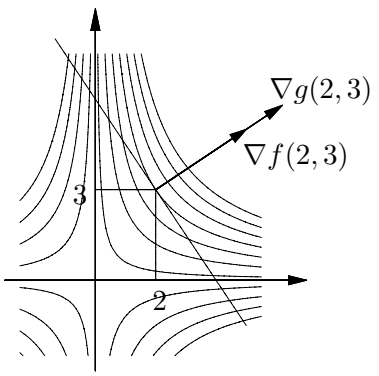

Figura 17.5

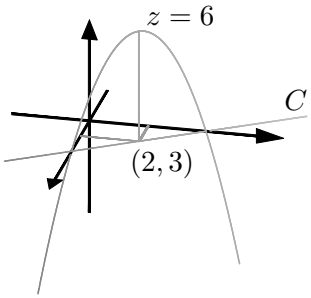

Figura 17.6

Note que a equação $3x = 2y$ determina o lugar geométrico dos pontos onde as curvas de nível de f e as curvas de nível de g são tangentes umas às outras. Veja a figura.

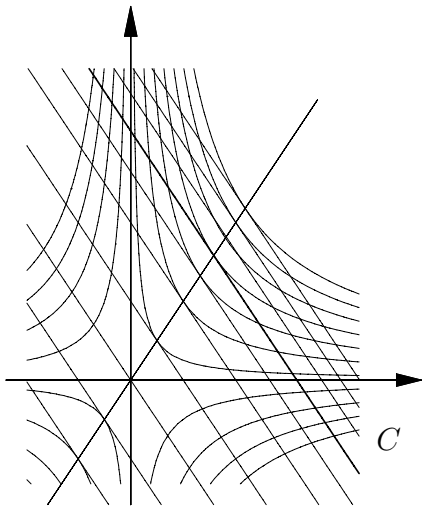

Figura 17.7: As hipérboles são as curvas de nível de f. As retas são as curvas de nível de g.

Ao resolver o sistema

$$\begin{cases} 3x = 2y \\ 3x + 2y = 12, \end{cases}$$

estamos calculando a intersecção deste tal conjunto com a curva de nível especial de g, o conjunto C, apresentado em destaque na figura anterior, relativo ao qual queremos maximizar a função f.

Sumário do método

Para localizar os pontos de máximo e de mínimo de uma função f sobre o conjunto

$$C = \{(x,y) \in \mathrm{Dom}(f)\,;\, g(x,y) = c\}$$

devemos:

1. Resolver $\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) = c; \end{cases}$
2. Fazer a análise global.

Mas, como diz o ditado, falar é fácil, fazer é que são elas! Do ponto de vista geométrico, ao eliminarmos a variável λ na equação vetorial estamos

determinando o lugar geométrico dos pontos nos quais as curvas de nível de f e de g são tangentes umas às outras.

Em seguida, devemos encontrar os pontos comuns a esse lugar geométrico e à curva $g(x, y) = c$.

O problema é que, mesmo nos casos mais simples, as contas podem ser muito difíceis. Na verdade, esses problemas são próprios para serem abordados com o auxílio de computadores.

Veja mais um exemplo.

Exemplo 17.2

Vamos determinar o ponto da elipse determinada por $x^2 + 4y^2 = 4$ que se encontra mais próximo do ponto $P = (1, 4)$, assim como o mais distante.

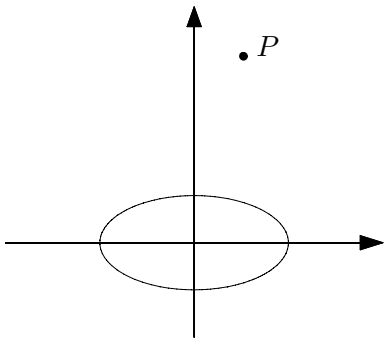

Figura 17.8: Elipse definida por $x^2 + 4y^2 = 4$ e o ponto P.

Queremos determinar os pontos extremos de uma função distância, que é equivalente a determinar os pontos extremos da função quadrado da distância. Em termos de equações, queremos determinar os pontos de máximo e de mínimo da função

$$f(x, y) = (x-1)^2 + (y-4)^2,$$

restrita à condição

$$g(x, y) = x^2 + 4y^2 = 4.$$

Nesse exemplo, podemos usar o Teorema de Weierstrass para concluir que o problema tem solução, uma vez que a função f é claramente contínua (função polinomial) e a elipse é um conjunto compacto.

Como $\nabla f(x,y) = (2x-2, 2y-8)$ e $\nabla g(x,y) = (2x, 8y)$, temos que resolver o sistema de equações a seguir.

$$\begin{cases} 2x - 2 &= 2\lambda\, x \\ 2y - 8 &= 8\lambda\, y \\ x^2 + 4y^2 &= 4. \end{cases}$$

Resolvendo as duas primeiras equações em λ, obtemos

$$1 - \frac{1}{x} \;=\; \lambda \;=\; \frac{1}{4} - \frac{1}{y}.$$

Ao fazermos essas contas, precisamos ter um pouco de cuidado. Note que no processo anterior, precisamos assumir que $x \neq 0$ e $y \neq 0$. Mas, é impossível fazer omeletes sem quebrar ovos!

A igualdade anterior, resolvida em y, fica

$$y \;=\; \frac{4x}{4-3x}$$

que determina uma hipérbole. Os candidatos a pontos de máximo e de mínimo são os pontos comuns a essa elipse e a essa hipérbole. Veja o esboço das curvas.

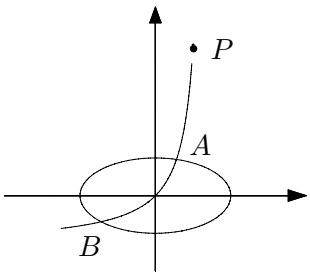

Figura 17.9: Os pontos A e B são os candidatos a mínimo e máximo.

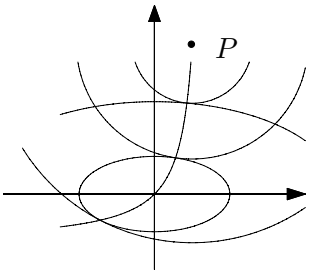

Figura 17.10: Curvas de nível de f e de g com seus pontos de tangência.

Do ponto de vista geométrico, o problema está resolvido, pois quanto mais longe de P, maior o valor de f. Assim, o ponto A é o ponto da elipse mais próximo de P e B é o mais distante.

Muito bem! No entanto, para determinar as coordenadas dos pontos A e B temos que resolver o sistema

$$\begin{cases} y = \dfrac{4x}{4-3x} \\ x^2 + 4y^2 = 4. \end{cases}$$

Essa tarefa não é, exatamente, fácil. Substituindo a primeira equação na segunda, obtemos

$$x^2 + 4\left(\frac{4x}{4-3x}\right)^2 = 4,$$

que resulta em resolver a equação

$$\frac{44x^2 - 24x^3 + 9x^4 - 64 + 96x}{(-4+3x)^2} = 0.$$

Como sair desse *imbróglio* sem uma máquina? Bem, nem tudo é perfeito. Aqui estão aproximações para as coordenadas dos pontos, calculados num computador portátil, com um programa bastante simples:

$A \approx (0.5582267850,\ 0.9602581498)$ e $B \approx (-1.442220237,\ -0.6928204653)$.

De qualquer forma, não podemos deixar de tentar. Aqui está uma oportunidade para você praticar.

Atividade 17.2

Determine o ponto pertencente ao trecho da parábola definida por $x = 4y - y^2$, pertencente ao primeiro quadrante, tal que o produto de suas coordenadas seja o maior possível.

Veja, nessa situação vale o Teorema de Weierstrass, pois estamos considerando um trecho limitado da parábola.

Veja, agora, um exemplo onde há pontos críticos no bordo e no interior do conjunto.

Exemplo 17.3

Determine os pontos extremos da função $f(x,y) = 3x^2 - 2xy + 3y^2 + 2y + 3$ no conjunto

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Vale recordar a estratégia: vamos montar uma lista de suspeitos: pontos críticos interiores (isto é, pontos (x, y) tais que $x^2 + y^2 < 1$ e $\nabla f(x, y) = \vec{0}$) e pontos críticos no bordo (pontos (x, y) tais que $x^2 + y^2 = 1$).

Aqui está o gradiente da função f:

$$\nabla f(x, y) = (6x - 2y, -2x + 6y + 2).$$

O único ponto crítico $(\nabla f(x, y) = \vec{0})$ é determinado pelo sistema de equações

$$\begin{cases} 3x - y = 0 \\ x - 3y = 1. \end{cases}$$

Esse ponto tem coordenadas $(-\frac{3}{8}, -\frac{1}{8})$. Como $(-\frac{3}{8})^2 + (-\frac{1}{8})^2 = \frac{10}{64} = \frac{5}{32} < 1$, esse ponto crítico pertence ao interior de A. Vamos calcular o hessiano da função nesse ponto:

$$H\Big(-\frac{3}{8}, -\frac{1}{8}\Big) = \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 36 - 4 = 32 > 0.$$

Como o hessiano é positivo e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-\frac{3}{8}, -\frac{1}{8}) = 6 > 0$, o ponto $(-\frac{3}{8}, -\frac{1}{8})$ é um mínimo local, bom candidato a mínimo absoluto de f e, portanto, bom candidato a mínimo de f em A.

Agora, o estudo no bordo, usando o método de Lagrange.

Vamos considerar $g(x, y) = x^2 + y^2$. Então, o bordo de A é determinado por $g(x, y) = 1$. Assim, temos que resolver o sistema

$$\begin{cases} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \\ g(x, y) = x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Como $\nabla g(x, y) = (2x, 2y)$, temos:

$$\begin{cases} 6x - 2y = 2\lambda\, x \\ -2x + 6y + 2 = 2\lambda\, y \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Só há uma coisa que um matemático deve temer: dividir por zero! Realmente, ao fazermos esses cálculos, precisamos ter um pouco de cuidado. Queremos eliminar λ, que aparece nas duas primeiras equações, obtendo uma relação envolvendo apenas x e y, para, com a terceira equação, determinar os pontos. Essa estratégia parece boa, mas há um pequeno detalhe. Quando isolamos λ, na primeira equação, fazemos:

$$\lambda = \frac{3x - y}{x},$$

que exclui a possibilidade $x = 0$. Mas, se $x = 0$, a equação $x^2 + y^2 = 1$ nos diz que $y = 1$ ou $y = -1$. No entanto, em ambos os casos, não existe λ que satisfaça as duas primeiras equações do sistema. Portanto, podemos prosseguir os cálculos já com a possibilidade $x = 0$ descartada.

Substituindo λ na segunda equação, obtemos

$$-x + 3y + 1 = \frac{(3x - y)y}{x}.$$

Expandindo e simplificando essa equação, obtemos

$$\frac{y^2 - x^2 + x}{x} = 0.$$

Queremos descobrir os pontos comuns às quádricas definidas por

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 & \text{círculo de raio 1} \\ x^2 - x - y^2 = 0 & \text{hipérbole.} \end{cases}$$

Fazendo $y^2 = x^2 - x$ e substituindo em $x^2 + y^2 = 1$, obtemos

$$x(2x - 1) = 0.$$

Como a possibilidade $x = 0$ está descartada, nos resta $x = \frac{1}{2}$ e, conseqüentemente, $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Além disso, $x = 1$ e $y = 0$ também é solução dessas duas equações, e, se fizermos $\lambda = 3$, a equação vetorial $\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$ também é satisfeita.

Portanto, temos aqui a nossa lista de pontos críticos, com os valores de f, uma boa aproximação do valor, as suas localizações e a conclusão, se o ponto é máximo ou mínimo.

(x, y)	$f(x, y)$	Aproximação	Localização	Conclusão
$(-3/8, -1/8)$	$25/8$	3.125	interior	mínimo
$(1/2, \sqrt{3}/2)$	$6 + \sqrt{3}/2$	6.866	bordo	máximo
$(1/2, -\sqrt{3}/2)$	$6 - \sqrt{3}/2$	5.134	bordo	
$(1, 0)$	6	6.0	bordo	

Observe que os pontos críticos $(1/2, -\sqrt{3}/2)$ e $(1, 0)$, do bordo de A, não são máximo nem mínimo. Na verdade, se restringirmo-nos exclusivamente no bordo, o ponto $(1/2, -\sqrt{3}/2)$ será o mínimo e o ponto $(1, 0)$ uma espécie de ponto de inflexão. Veja o gráfico de f restrita ao conjunto A, apresentado numa posição reversa, para melhor observação do seu comportamento no bordo.

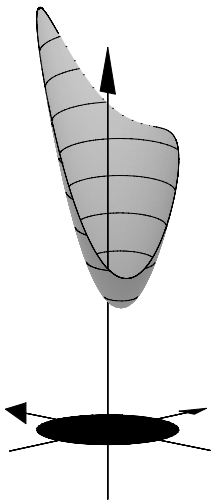

Figura 17.11: Gráfico de f sobre o conjunto A.

Para terminarmos a seção de figuras, veja o gráfico da condição $x^2+y^2 = 1$ com a hipérbole $x^2 - x - y^2 = 0$, que determinam os três pontos críticos do bordo e com as principais curvas de níveis da função f.

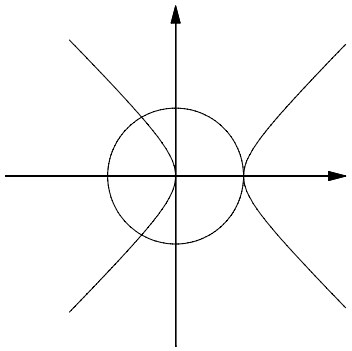

Figura 17.12: Curvas $x^2 + y^2 = 1$ $x^2 - x - y^2 = 0$ e determinando os pontos críticos do bordo de A.

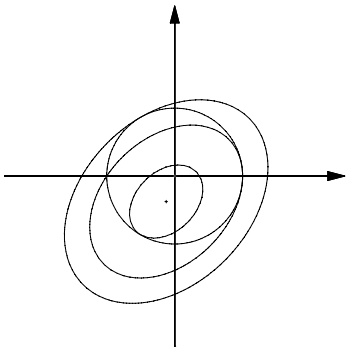

Figura 17.13: Curvas de nível de f que tangenciam a curva $x^2 + y^2 = 1$.

Puxa! A conversa estava animada e a gente nem se deu pelo avançado da hora! Na próxima aula você verá a demonstração do Teorema dos Multiplicadores de Lagrange, assim como mais exemplos. Ainda falta considerarmos situações que envolvam funções com mais do que duas variáveis. Além disso, nosso detetive está com uma dúvida: por que o método é denominado Multiplicadores de Lagrange se, até agora, só usamos λ, um multiplicador? Muito bem, tudo isso, e muito mais, na próxima aula.

Aqui está uma lista de exercícios para você praticar.

Exercícios

Exercício 1

Determine os pontos de máximo e de mínimo da função $f(x, y) = 4 - 2x + 3y$ no conjunto

$$A \;=\; \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, 4x^2 + 9y^2 \leq 36\}.$$

Exercício 2

Determine os pontos de máximo e de mínimo da função $f(x, y) = x^2 + 4y^2$ no conjunto

$$A \;=\; \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, x + 4y = 8\},$$

caso existam.

Exercício 3

Determine os pontos da curva definida por $5x^2 - 6xy + 5y^2 = 8$ que estão mais próximos e os que estão mais distantes da origem.

Exercício 4

Determine os pontos de máximo e de mínimo da função $f(x, y) = xy$ no conjunto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; \mathrm{x} \geq 0, \mathrm{y} \geq 0, \mathrm{x} + 3\mathrm{y} \leq 3\}.$$

Exercício 5

Determine os pontos de máximo e de mínimo da função $f(x, y) = x^2+y^2$ no conjunto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; \mathrm{x}^2 - \mathrm{xy} + \mathrm{y}^2 = 3\}.$$